UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA VII./8. (VIII./9.) i VIII./8 (IX./9) RAZREDA
OSNOVNIH ŠKOLA: HNŽ, ŽSB, ŽZH, HBŽ i ŽP
Neum, Novi Travnik, Ljubuški, Livno, Donja Mahala, 5. travnja 2014.

VIII./8 (IX./9.) RAZRED

Zadatak 1. **Izraz** $A=\frac{1}{2}x^3-\frac{k+2}{3}x^2+\frac{9-k}{4}x+55$, **ima vrijednost** -1 **za** $x=-4$.

Kolika je vrijednost toga izraza za $x=-\frac{2}{3}$ **?**

(x^3 **je oznaka za umnožak** $x\cdot x\cdot x$**).**

RJEŠENJE:

Ako u zadani izraz stavimo $x=-4$ **i** $A=-1$ **dobivamo**

$$\frac{1}{2}(-4)^3-\frac{k+2}{3}(-4)^2+\frac{9-k}{4}(-4)+55=-1$$

$$\frac{1}{2}(-64)-\frac{k+2}{3}16-\frac{9-k}{4}4+55=-1$$

$$-32-\frac{16k+32}{3}-(9-k)+55=-1$$

$$23-16\frac{k+2}{3}-9+k=-1 \quad \textbf{pomnožimo jednakost s } 3$$

$$69-16k-32-27+3k=-3$$

$$-13k=-13$$

$$k=1$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti $k=1$ **i vrijednosti** $x=-\frac{2}{3}$ **u zadani izraz imamo:**

$$A=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^3-\frac{1+2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{9-1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)+55=-\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{27}-\frac{4}{9}-\frac{4}{3}+55=-\frac{4}{27}-\frac{4}{9}-\frac{4}{3}+55=$$

$$=\frac{-4-12-36}{27}+55=-\frac{52}{27}+55=53\frac{2}{27}.$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA VII./8. (VIII./9.) i VIII./8 (IX./9) RAZREDA OSNOVNIH ŠKOLA: HNŽ, ŽSB, ŽZH, HBŽ i ŽP

Neum, Novi Travnik, Ljubuški, Livno, Donja Mahala, 5. travnja 2014.

VIII./8 (IX./9.) RAZRED

Zadatak 2. Odredi sve cijele brojeve a, b i c za koje vrijede jednakosti:

$$a^2 + 2b^2 - 2bc = 121 \text{ i } 2ab - c^2 = 121.$$

RJEŠENJE:

Kako su u ove dvije jednakosti jednake desne strane to su im jednake i lijeve (tranzitivnost), pa imamo

$$a^2 + 2b^2 - 2bc = 2ab - c^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 = 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 = 0 \text{ ,}$$

Posljednja je jednakost ispunjena samo onda ako su oba pribrojnika jednaka nulu tj.

$a - b = 0$ **i** $b - c = 0$**, dalje imamo**

$a = b$ **i** $b = c$ **odnosno**

$a = b = c$ **uvrštavanjem u bilo koju od danih jednakosti imamo**

$$a^2 + 2a^2 - 2a^2 = 121$$

$a^2 = 121$ **odakle dobivamo da je**

$a = 11$ **ili** $a = -11$

Pa je rješenje: $a = b = c = 11$ **ili** $a = b = c = -11$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA VII./8. (VIII./9.) i VIII./8 (IX./9) RAZREDA
OSNOVNIH ŠKOLA: HNŽ, ŽSB, ŽZH, HBŽ i ŽP
Neum, Novi Travnik, Ljubuški, Livno, Donja Mahala, 5. travnja 2014.

VIII./8 (IX./9.) RAZRED

Zadatak 3. Rješenje jednadžbe

$$\frac{\frac{2}{3}x-1}{6}-\frac{\frac{3}{5}x+7}{8}=\frac{\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}{5}-\frac{5}{2}$$ **je duljina dijagonale kvadrata, izražena u** *cm.*

Koliki je opseg tog kvadrata?

RJEŠENJE:

$$\frac{\frac{2}{3}x-1}{6}-\frac{\frac{3}{5}x+7}{8}=\frac{\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}{5}-\frac{5}{2} \quad /\cdot 120$$

$$20\left(\frac{2}{3}x-1\right)-15\left(\frac{3}{5}x+7\right)=24\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)-300$$

$$\frac{40}{3}x-20-9x-105=12x+60-300 \quad /\cdot 3$$

$$40x-60-27x-315=36x+180-900$$

$$-23x=-345 \quad /\cdot\left(-\frac{1}{23}\right)$$

$$x=15$$

Dakle je dijagonala kvadrata $d=15cm$**.**

Iz formule za duljinu dijagonale kvadrata $d=a\sqrt{2}$ **slijedi** $a=\frac{d\sqrt{2}}{2}$**, pa je opseg kvadrata** $O=4a \quad \Rightarrow O=2d\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad O=2\cdot 15\sqrt{2}$ **konačno je** $O=30\sqrt{2}cm$**.**

q.e.d.

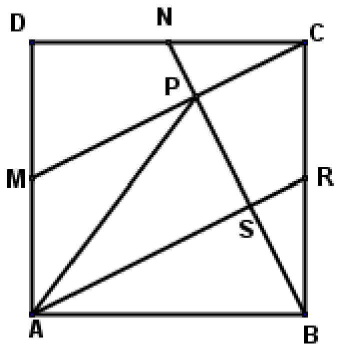
UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA VII./8. (VIII./9.) i VIII./8 (IX./9) RAZREDA
OSNOVNIH ŠKOLA: HNŽ, ŽSB, ŽZH, HBŽ i ŽP
Neum, Novi Travnik, Ljubuški, Livno, Donja Mahala, 5. travnja 2014.

VIII./8 (IX./9.) RAZRED

Zadatak 4. **Dan je kvadrat $ABCD$. Ako je točka M polovište stranice $\overline{AD}$, točka N polovište stranice $\overline{CD}$, a točka P presjek dužina $\overline{BN}$ i $\overline{CM}$, onda je $|AP| = |AB|$. Dokaži.**

RJEŠENJE:



Primijetimo prvo da je $\Delta BCN \cong \Delta CDM$, jer vrijede jednakosti: $|BC|=|CD|$, $|CN| = |DM|$ i $\angle BCN = \angle CDM = 90^0$. Iz dokazane sukladnosti trokuta slijedi da je $\angle BNC = \angle CMD$. Sada gledamo trokute ΔCNP i ΔCDM. Zbog $\angle BNC = \angle PNC = \angle CMD$ i zajedničkog kuta $\angle PCN = \angle MCD$, ti trokuti imaju dva para jednakih kutova. No tada im je i treći par kutova jednak tj. Vrijedi jednakost $\angle CPN = \angle CDM = 90^0$.
Označimo sa R polovište dužine $\overline{BC}$, odnosno neka je $|BR| = |CR|$. Zbog $AM \parallel CR$ i $|AM| = |CR|$ zaključujemo da je četverokut $ARCM$ paralelogram tj. da je $AR \parallel MC$. Iz $BN \perp CM$ sada slijedi i da je $BN \perp AR$.
Neka je točka S presjek dužina $\overline{AR}$ i $\overline{BN}$.
Kako je $|BR| = |CR|$ i $RS \parallel CP$ dužina $\overline{RS}$ je srednjica trokuta ΔBCP. Zato je $|BS| = |PS|$.
Prema tome pravac AR je simetrala dužine $\overline{BP}$, pa prema poučku o simetrali dužine slijedi da je $|AP| = |AB|$.

q.e.d.